XVIII secolo


Leonhard Euler

Il campo di studio fondamentale del XVIII secolo fu l'analisi matematica.

Proseguendo l'opera dei Bernoulli, Leonhard Euler (1707-1783) (chiamato anche Eulero) trovò la soluzione al problema di Basilea, introdusse la costante di Eulero-Mascheroni e le funzioni gamma e beta.

Trovò poi molti metodi per la soluzione delle equazioni differenziali usati anche oggi e insieme all'amico Jean d'Alembert (1717-1783) affrontò molti problemi di meccanica razionale come la determinazione esatta del moto della Luna.

Insieme a d'Alembert e a Daniel Bernoulli (figlio di Jakob) studiò poi il moto dei fluidi.

D'Alembert riuscì invece a risolvere l'equazione differenziale nota come equazione di d'Alembert. Studiò poi vari problemi di teoria dei giochi e il calcolo delle probabilità. Si occupò anche di algebra cercando a più riprese di dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra. Nonostante queste dimostrazioni fossero in parte lacunose e il teorema sarebbe stato dimostrato rigorosamente solo da Gauss, il teorema è spesso chiamato teorema di d'Alembert.

Eulero fu uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Produsse più di 886 pubblicazioni su ogni branca della matematica nonostante nell'ultima parte della sua vita fosse divenuto cieco. Diede importanti contributi alla notazione matematica introducendo i simboli oggi accettati per le funzioni trigonometriche, la sommatoria, la funzione generica e per i numeri *e* ed *i*.

Diffuse anche l'uso del simbolo π

Fu anche un importante teorico dei numeri, materia che ebbe un notevole sviluppo in questo secolo. Scoprì il prodotto di Eulero, grazie al quale fornì una dimostrazione dell'infinità dei numeri primi, dando così di fatto inizio alla teoria analitica dei numeri che usa procedimenti analitici per raggiungere risultati aritmetici. Dimostrò poi molti dei teoremi lasciati indimostrati da Fermat e introdusse la funzione phi di Eulero.

Christian Goldbach enunciò la sua famosa congettura tutt'oggi irrisolta che afferma che ogni numero pari eccetto 2 è esprimibile come somma di due numeri primi.

In questo periodo i numeri immaginari e quelli complessi furono accettati completamente. L'analisi complessa divenne una branca importante della matematica: Eulero studiò le serie di Taylor trovando le espansioni in serie di molte funzioni. Grazie a ciò riuscì a scoprire le estensioni di moltissime funzioni reali in campo complesso, come per esempio le funzioni trigonometriche, la funzione logaritmica e la funzione esponenziale. Grazie a quest'ultima estensione trovò l'identità di Eulero:

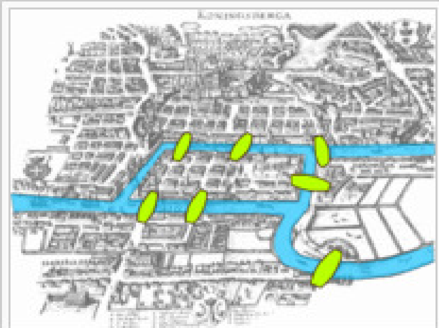
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

considerata da molti la più bella formula della matematica. Altri contributi alla materia giunsero da Abraham de Moivre.

In questo secolo si assistette anche alla nascita della topologia e della teoria dei grafi soprattutto per via delle scoperte di Eulero. Egli infatti risolse il problema dei ponti di Königsberg che chiedeva se fosse possibile attraversare i tutti i ponti della città di Königsberg (Kaliningrad) una sola volta e tornare al punto di partenza. Eulero scoprì che ciò non era possibile e il ragionamento che usò sta alla base della moderna teoria dei grafi. Il matematico svizzero scoprì poi anche la formula che mette in relazione il numero dei vertici delle facce e degli spigoli di un poliedro convesso. Queste scoperte possono essere considerate come l'inizio della moderna topologia.

La città di Königsberg ai tempi di Eulero con i ponti messi in evidenza.

Lorenzo Mascheroni dimostrò che se una retta si considera nota quando sono stati individuati due suoi punti allora tutte le figure costruibili con riga e compasso sono costruibili col solo compasso. Vi furono anche diversi tentativi di dimostrare il quinto postulato di Euclide partendo dagli altri quattro. Tra questi si ricordano quello di Girolamo Saccheri, Vitale Giordano, e Jean-Henri Lambert. Quest'ultimo si avvicinò molto alla geometria non euclidea. Lambert è ricordato anche per aver dimostrato che π è irrazionale (vedi dimostrazione della irrazionalità di π).



La città di Königsberg ai tempi di Eulero con i ponti messi in evidenza

Ci furono sviluppi anche nel campo del calcolo delle probabilità: Thomas Bayes dimostrò il teorema che porta il suo nome e Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon diede inizio al metodo Monte Carlo con il famoso problema dell'ago di Buffon.

Nella seconda metà del secolo Parigi divenne il più importante centro matematico e scientifico del tempo. Questo avvenne grazie alla presenza di matematici come Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Joseph-Louis Lagrange (1736-1837) e all'istituzione di scuole di carattere scientifico come l'École polytechnique e l'École normale supérieure che fornirono validi matematici alla Francia.

Laplace e Lagrange si occuparono di meccanica celeste. Dopo il lavoro di Newton essa divenne uno degli argomenti più trattati del secolo.

Laplace nella sua *Mécanique Céleste* dimostrò che il sistema solare sarebbe rimasto stabile per un lungo intervallo di tempo. Introdusse le armoniche sferiche la trasformata di Laplace e il Laplaciano.

Fu uno dei primi a utilizzare il concetto di potenziale dimostrando che esso soddisfa sempre l'equazione di Laplace. Si occupò anche di teoria della probabilità e statistica riscoprendo il teorema di Bayes e fornendo una dimostrazione rigorosa del metodo dei minimi quadrati.

Lagrange invece nella sua *Mécanique analytique* introdusse il concetto di funzione lagrangiana. Insieme ad Eulero fu tra i creatori del calcolo delle variazioni ricavando le equazioni di Eulero-Lagrange. Studiò inoltre il problema dei tre corpi trovando i punti di Lagrange. Scoprì il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la risoluzione delle equazioni differenziali. Introdusse la notazione usata ancora oggi per il calcolo differenziale e trovò un metodo per la soluzione delle equazioni di qualunque grado che però si rivela utile solo fino al quarto.

Dimostrò poi il teorema di Lagrange e contribuì molto anche alla teoria dei numeri dimostrando ad esempio il teorema dei quattro quadrati. Studiò anche la geometria analitica solida ottenendo discreti risultati.

Un altro importante matematico del periodo fu Adrien-Marie Legendre (1752-1833) che studiò gli integrali ellittici introducendo quelli della prima e della seconda specie. Congetturò il metodo dei minimi quadrati indipendentemente da Gauss. Fu anche un brillante teorico dei numeri: dimostrò l'ultimo teorema di Fermat per il caso n=5, dimostrò l'irrazionalità di π^2 e scoprì la legge di reciprocità quadratica esponendola nella sua forma attuale. Sempre indipendentemente da Gauss congetturò il Teorema dei numeri primi.

Gaspard Monge dette invece contributi fondamentali alla geometria descrittiva.

Breve storia degli insiemi numerici

> **«** Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo. **»**
>
> (Leopold Kronecker)

I numeri naturali sono presenti in ogni cultura e in ogni epoca. Anche le civiltà più primitive sanno distinguere i concetti di "uno" e "due".

Fin dalla matematica egizia si trovano riferimenti ai numeri razionali: nel papiro di Rhind si trovano le regole per a somma e la moltiplicazione di frazioni. Gli egizi amavano esprimere le frazioni più complesse come somma di frazione con numeratore 1 e di 2/3.

La scoperta dei numeri irrazionali si ebbe in Grecia. Infatti anche se i Babilonesi si erano trovati a dover risolvere equazioni di secondo grado sembra che non si siano mai interrogati sulla natura delle soluzioni (a volte irrazionali) ma si siano accontentati di buone approssimazioni dei radicali.

Secondo la tradizione fu il pitagorico Ippaso di Metaponto a dimostrare l'incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato (che misura radice di due volte il lato). La dimostrazione riportata da Euclide è probabilmente troppo complessa e sembra più probabile che Ippaso sia arrivato al risultato per altre vie. Comunque sia la scoperta fu considerata uno scandalo dai pitagorici che ritenevano che tutto l'universo fosse esprimibile tramite rapporti tra numeri naturali. Si dice addirittura che la scoperta costò la vita a Ippaso, ovvero che i pitagorici preferirono ucciderlo per evitare che il segreto si divulgasse.

I numeri negativi entrarono molto dopo nella matematica occidentale. Nella matematica indiana e cinese erano generalmente accettati, anche se con qualche riserva. Gli Arabi li conoscevano e i mercanti li usavano correntemente per indicare i debiti ma non erano usati correntemente in algebra. Ciò portava, per esempio, allo studio di vari tipi di equazioni di secondo grado, invece che della forma normale odierna, nella quale i coefficienti possono assumere qualunque segno. I numeri negativi erano spesso indicati con colori differenti.

Ancora nel '500 in Europa i numeri negativi venivano trattati con diffidenza quando Girolamo Cardano si trovò, studiando la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado a dover maneggiare numeri complessi. Infatti equazioni del tipo $x^2 + 1 = 0$ erano considerate irrisolvibili e non venivano prese in considerazione; tuttavia la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado contemplava un "caso irriducibile" nel quale l'equazione aveva soluzioni reali, ma nei calcoli si doveva operare su numeri immaginari (si veda equazione di terzo grado).

Il primo ad azzardare una soluzione fu Rafael Bombelli che nella sua *Algebra* proponeva di utilizzare le "quantità silvestri" (radici di numeri negativi) purché sparissero nella soluzione finale. Infatti espone le regole del calcolo sulle quantità immaginarie (Bombelli usa "meno di meno" e "più di meno" rispettivamente per -i e +i). I numeri complessi vanno via via affermandosi in Europa. Cartesio è il primo a chiamare le radici di un numero negativo "numeri immaginari". I matematici cominciarono a studiarli come entità a sé stanti e Abraham de Moivre scoprì la formula che porta il suo nome:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Eulero, lavorando con l'espansione in serie di Taylor della funzione esponenziale, riuscì ad estenderla ai numeri complessi tramite la formula di Eulero:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

L'accettazione definitiva dei numeri complessi si ebbe quando all'inizio del XIX secolo Caspar Wessel, Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss scoprirono indipendentemente l'uno dall'altro la loro rappresentazione grafica: il piano complesso, in cui le coordinate di un punto rappresentano la parte reale e immaginaria del numero. Augustin-Louis Cauchy sviluppò l'analisi complessa con il teorema integrale di Cauchy e le equazioni di Cauchy-Riemann

Tutti gli insiemi numerici qui descritti furono definiti in qualche modo per trovare soluzioni ad equazioni altrimenti insolubili. Nel 1844 Joseph Liouville, definì un numero (la costante di Liouville) che non era radice di nessun polinomio a coefficienti razionali ed era dunque trascendente. Rispettivamente nel 1873 e nel 1882 Charles Hermite e Ferdinand von Lindemann dimostrarono la trascendenza di e e di pi greco (si vedano anche dimostrazione della trascendenza di e e dimostrazione della irrazionalità di e). Più tardi si dimostro che il logaritmo naturale di qualsiasi numero razionale positivo diverso da 1 è trascendente e anche la funzione seno con argomento algebrico (cioè non trascendente). Un importante contributo in materia è il teorema di Gelfond che risolve parzialmente il Settimo problema di Hilbert.

Georg Cantor studiando gli insiemi infiniti scoprì che non ono tutti equipotenziali. Dunque in termini poco rigorosi non tutti gli infiniti sono ugualmente grandi. Introdusse così i numeri transfiniti per esprimere la cardinalità dei vari insiemi non finiti.

Nel XIX secolo si sentì il bisogno di definire in modo più rigoroso il concetto di numero irrazionale. Karl Weierstrass e Richard Dedekind arrivarono tramite due strade diverse a una nuova formulazione del concetto. Una costruzione simile dei numeri naturali dovrà aspettare il XX secolo e gli assiomi di Peano.